

Graphes de Cordes et Espaces Graphiques

F. JAEGER

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple; $\forall v \in V$, soit N_v l'ensemble des sommets adjacents à v . $\mathcal{P}(V)$ étant supposé muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\text{GF}(2)$, nous appellerons *espace de voisinages de G* tout sous-espace de $\mathcal{P}(V)$ engendré par une famille de parties de V de la forme: $(\varepsilon(v)\{v\} + N_v, v \in V)$, où ε est une application quelconque de V dans $\text{GF}(2)$.

Un graphe est dit *de cordes* s'il est isomorphe au graphe de croisement d'un ensemble de cordes d'un cercle.

Un espace (couple (X, \mathcal{F}) où \mathcal{F} est un sous-espace de $\mathcal{P}(X)$) est dit *graphique* s'il est isomorphe à l'espace des cycles d'un graphe.

Nous démontrons qu'un espace est graphique si et seulement si il est isomorphe à un espace de voisinages d'un graphe de cordes.

Ce résultat nous permet une approche nouvelle de problèmes relatifs aux hypergraphes de chaînes d'un arbre, à la planarité des graphes, à leur espace de bicycles, à leur graphe d'entrelacement. Il implique d'autres propriétés intéressantes des graphes de cordes.

1. DEFINITIONS

1.1. GRAPHS

Un graphe est un couple (V, E) , où: V est un ensemble fini de *sommets*, E est un ensemble fini d'*arêtes* ($V \cap E = \emptyset$) et à toute arête on associe deux sommets qui sont ses *extrémités*; une arête dont les deux extrémités sont confondues est une *boucle*; deux arêtes qui ont le même ensemble d'extrémités sont dites *parallèles*. Un graphe sans boucle qui n'admet pas deux arêtes parallèles distinctes est dit *simple*; un graphe simple pourra être défini par sa relation d'*adjacence*, deux sommets étant dits adjacents s'il existe une arête ayant ces deux sommets pour extrémité.

Un graphe simple est dit *de cordes* si son ensemble de sommets peut être mis en bijection avec un ensemble de cordes d'un cercle de sorte que deux sommets distincts du graphe sont adjacents si et seulement si les cordes correspondantes s'intersectent; il est facile de voir que l'on pourra alors supposer en outre (grâce à un agrandissement adéquat du cercle considéré) que deux cordes ne s'intersectent jamais sur le cercle. On trouvera dans [2] une bonne introduction aux graphes de cordes.

Pour les autres définitions relatives aux graphes qui seront utilisées ici nous renvoyons le lecteur à [1].

1.2. ESPACES

Soit X un ensemble fini; $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X . Pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$ on note $A + B$ la différence symétrique de A et B . Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, $\lambda \in \text{GF}(2) = \{0, 1\}$, on pose: $\lambda A = \emptyset$ si $\lambda = 0$, $\lambda A = A$ si $\lambda = 1$. $\mathcal{P}(X)$ est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\text{GF}(2)$. Pour simplifier les notations, pour tout élément x de X , nous noterons également x la partie $\{x\}$ de X ; l'interprétation de cette notation sera donnée par le contexte.

Soit $(A_i, i \in I)$ une famille de parties de X ; nous noterons $\langle A_i, i \in I \rangle$ le sous-espace de $\mathcal{P}(X)$ engendré par cette famille. De même si $A \subseteq X$, $\langle A \rangle$ désignera le sous-espace de $\mathcal{P}(X)$ engendré par A ($\langle A \rangle = \{\emptyset, A\}$ si $A \neq \emptyset$).

Pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$ nous désignerons par $A \cdot B$ l'élément de $\text{GF}(2)$ égal à 0 si $|A \cap B|$ est pair, et à 1 sinon; l'application de $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ dans $\text{GF}(2)$ ainsi définie est une

forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Soit \mathcal{F} un sous-espace de $\mathcal{P}(X)$; l'ensemble: $\{A \in \mathcal{P}(X) / \forall F \in \mathcal{F}, F \cdot A = 0\}$ est un sous-espace de $\mathcal{P}(X)$ que l'on note F^\perp et que l'on appelle le *sous-espace de $\mathcal{P}(X)$ orthogonal à \mathcal{F}* . Rappelons que $(\mathcal{F}^\perp)^\perp = \mathcal{F}$ et que si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont deux sous-espaces de $\mathcal{P}(X)$: $(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)^\perp = \mathcal{F}_1^\perp \cap \mathcal{F}_2^\perp$.

Nous appellerons ici *espace* tout couple (X, \mathcal{F}) où X est un ensemble fini et où \mathcal{F} est un sous-espace de $\mathcal{P}(X)$. Deux espaces (X, \mathcal{F}) et (X', \mathcal{F}') sont dit *isomorphes* s'il existe une bijection $\phi: X \rightarrow X'$ telle que $\{\phi(F) / F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}'$.

REMARQUE. Soit (X, \mathcal{F}) un espace; les éléments minimaux par inclusion de $\mathcal{F} - \{\emptyset\}$ constituent les circuits d'un matroïde binaire sur X , que nous noterons $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, et \mathcal{F} est l'espace engendré par les circuits de $\mathcal{M}(\mathcal{F})$. Inversement, tout matroïde binaire sur X est de la forme $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, où \mathcal{F} est le sous-espace de $\mathcal{P}(X)$ engendré par ses circuits. Les résultats présentés ici pourront donc être transcrits dans le langage de la Théorie des matroïdes binaires ([11], chapitre 10).

1.3. ESPACES ET GRAPHES

1.3.1. Cycles et cocycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour toute arête e de G d'extrémités v et v' on pose: $\partial_G(e) = v + v'$ (donc $\partial_G(e) = \emptyset$ si e est une boucle); pour toute partie F de E on pose: $\partial_G(F) = \sum_{e \in F} \partial_G(e)$. ∂_G est une application linéaire de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(V)$; son noyau est noté $\mathcal{C}(G)$ et $(E, \mathcal{C}(G))$ est l'espace des cycles de G .

Pour tout sommet v de G on pose: $\omega_G(v) = \{e \in E / v \in \partial_G(e)\}$; pour toute partie W de V on pose: $\omega_G(W) = \sum_{v \in W} \omega_G(v)$. ω_G est une application linéaire de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathcal{P}(E)$; son image est notée $\mathcal{H}(G)$ et $(E, \mathcal{H}(G))$ est l'espace des cocycles de G . On vérifie facilement que $\mathcal{H}(G) = \mathcal{C}(G)^\perp$.

Un espace est dit *graphique* (respectivement: *cographique*) s'il est isomorphe à l'espace des cycles (respectivement: des cocycles) d'un graphe. Un espace est dit *planair* s'il est à la fois graphique et cographique (d'après le Théorème de Dualité de Whitney, un espace est donc planair si et seulement si il est isomorphe à l'espace des cycles d'un graphe planair).

1.3.2. Espaces de voisinages d'un graphe simple

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple; $\forall v \in V$ nous noterons N_v le voisinage de v , c'est à dire l'ensemble des sommets de G adjacents à v . Nous appellerons *espace de voisinages de G* tout espace de la forme $(V, \langle \varepsilon(v)v + N_v, v \in V \rangle)$, où ε est une application quelconque de V dans $\text{GF}(2)$.

2. LE RESULTAT PRINCIPAL

Nous allons démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME. *Un espace est graphique si et seulement si il est isomorphe à un espace de voisinages d'un graphe de cordes.*

2.1. DÉMONSTRATION

2.1.1. Tout espace de voisinages d'un graphe de cordes est graphique

Considérons un graphe de cordes $G = (V, E)$ donné par la représentation suivante: R est un graphe cubique (sans boucles) qui comporte un cycle hamiltonien H ; V est l'ensemble des arêtes de R n'appartenant pas à H (c'est à dire des 'cordes' du cycle hamiltonien); deux éléments distincts v_1 et v_2 de V sont adjacents dans G si et seulement

si chacune des deux chaînes élémentaires reliant dans H les extrémités de v_1 contient une extrémité de v_2 (c'est à dire si et seulement si v_1 et v_2 se 'croisent'). Il est clair que tout graphe de cordes peut être représenté comme ci-dessus et nous n'avons donc rien perdu en généralité.

Soit alors ε une application quelconque de V dans $\text{GF}(2)$, et soit $\mathcal{F} = \langle \varepsilon(v)v + N_v, v \in V \rangle$. Nous allons démontrer que l'espace (V, \mathcal{F}) est graphique.

La démonstration donnée ci-dessous, beaucoup plus simple que la démonstration initiale, est due à Jean-Claude Fournier.

Dans la suite, H désigne également l'ensemble des arêtes du cycle hamiltonien H .

Nous définissons maintenant un graphe D dont l'ensemble des sommets est H et qui comporte, pour chaque élément v de V , deux arêtes l_v^1 et l_v^2 dont les extrémités sont choisies comme suit: les deux extrémités p_1 et p_2 de l'arête v de R sont reliées dans H par deux chaînes élémentaires C_1 et C_2 disjointes (sauf en p_1 et p_2) dont l'union est H . Pour $i = 1, 2, j = 1, 2$, soit h_i^j l'arête de H incidente à p_i et appartenant à la chaîne C_j . Alors: si $\varepsilon(v) = 0$, l_v^1 a pour extrémités h_1^1 et h_2^1 et l_v^2 a pour extrémités h_1^2 et h_2^2 ; si $\varepsilon(v) = 1$, l_v^1 a pour extrémités h_1^1 et h_2^2 , et l_v^2 a pour extrémités h_1^2 et h_2^1 .

Remarquons que le graphe D ainsi défini peut comporter des boucles et des arêtes distinctes parallèles et que D est régulier de degré 2: chaque composante connexe de D est un cycle élémentaire.

REMARQUE. La théorie des graphes topologiques permet d'interpréter ces cycles élémentaires, composantes connexes de D , comme les contours des faces d'une carte sur une certaine surface. Ce point sera précisé dans un article ultérieur.

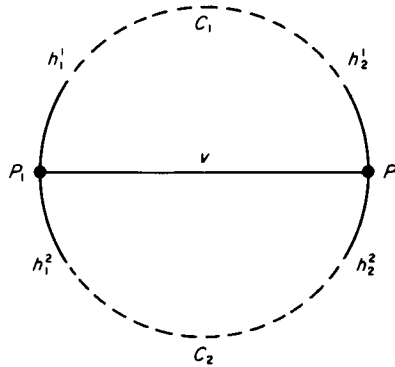


FIGURE 1

Soient donc D_1, \dots, D_q les composantes connexes de D . Considérons une corde v de V . Nous dirons que v appartient à D_i si l'une au moins des arêtes l_v^1, l_v^2 appartient à D_i .

Il est clair que toute corde appartient soit à deux composantes de D , soit à une seule. Nous pouvons donc définir un graphe Γ dont l'ensemble des sommets est $\{D_1, \dots, D_q\}$, dont l'ensemble des arêtes est V , par la propriété suivante: $\forall v \in V, \forall i \in \{1, \dots, q\}$, D_i est extrémité de v dans Γ si et seulement si v appartient à D_i .

Nous allons montrer que l'espace de voisinages \mathcal{F} est égal à l'espace des cycles de Γ , $\mathcal{C}(\Gamma)$.

(a) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Gamma)$: Soit $v \in V$. La corde v définit une bipartition de H en deux chaînes élémentaires C_1, C_2 ayant mêmes extrémités que v . Soit $\rho_v = \omega_D(C_1) = \omega_D(C_2)$ le cocycle de D associé à cette bipartition. Il est clair que:

$$\rho_v = \bigcup_{w \in \varepsilon(v)v + N_v} \{l_w^1, l_w^2\}.$$

Considérons une composante connexe D_i de D , dont on note également D_i l'ensemble des arêtes. D_i étant un cycle élémentaire de D , $D_i \in \mathcal{C}(D)$, et donc: $\rho_v \cdot D_i = 0$. Ceci s'écrit:

$$\sum_{w \in \varepsilon(v)v + N_v} \{l_w^1, l_w^2\} \cdot D_i = 0.$$

Comme $\{l_w^1, l_w^2\} \cdot D_i = 1$ si et seulement si $w \in \omega_r(D_i)$, nous obtenons:
 $(\varepsilon(v)v + N_v) \cdot \omega_r(D_i) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout v dans V et pour tout i dans $\{1, \dots, q\}$, (a) est démontré.

(b) $\mathcal{F}^\perp \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$: Soit $A \in \mathcal{F}^\perp$. Colorions les arêtes de H en deux couleurs de sorte que deux arêtes consécutives aient une couleur différente si et seulement si leur sommet commun est extrémité d'une corde de A (c'est possible puisque le nombre de tels sommets est pair). Soient h et h' deux arêtes de H adjacentes dans D , et soit l_v^i ($v \in V$, $i \in \{1, 2\}$) l'arête de D d'extrémités h et h' . Puisque $(\varepsilon(v)v + N_v) \cdot A = 0$:

si $v \in A$ et $\varepsilon(v) = 1$, v croise un nombre impair de cordes de A .

sinon, v croise un nombre pair de cordes de A .

Il est facile d'en déduire que dans les deux cas h et h' sont de même couleur. Il s'ensuit que chaque composante connexe D_i de D est formée d'arêtes d'une même couleur; affectons lui cette couleur.

On constate alors qu'une corde v est dans A si et seulement si elle appartient à deux composantes connexes de D de couleurs différentes. Donc $A \in \mathcal{K}(\Gamma)$ et (b) est démontré.

(c) *En conclusion*: (b) donne par orthogonalité: $[\mathcal{K}(\Gamma)]^\perp \subseteq (\mathcal{F}^\perp)^\perp$, soit $\mathcal{C}(\Gamma) \subseteq \mathcal{F}$, ce qui avec (a) donne le résultat.

2.1.2. *Tout espace graphique est isomorphe à un espace de voisinages d'un graphe de cordes*

Il est facile de vérifier que cette proposition est équivalente à la suivante: Pour tout graphe γ connexe sans boucles ni isthmes, l'espace des cycles de γ est isomorphe à un espace de voisinages d'un graphe de cordes.

Soit donc $\gamma = (S, A)$ un tel graphe. Construisons un graphe M de la façon suivante: l'ensemble des sommets de M est A ; pour chaque sommet s de γ de degré d ($d = |\omega_\gamma(s)|$), M comportera d arêtes formant un cycle élémentaire C_s ayant pour ensemble de sommets $\omega_\gamma(s)$. M est donc un graphe connexe 4-régulier sans boucles. Pour tout sommet s de γ , tout ensemble de deux arêtes incidentes de C_s sera dit *paire interdite*. L'ensemble des arêtes incidentes à chaque sommet de M est donc partitionné en deux paires interdites.

Nous pouvons alors, en appliquant un résultat de Kotzig ([6], Théorème 3), affirmer que M admet un cycle eulérien tel que deux arêtes successives quelconques ne forment jamais une paire interdite.

Choisissons un parcours quelconque P de ce cycle: chaque sommet (c'est à dire chaque élément de A) est rencontré exactement deux fois. Considérons le graphe R suivant: R a $p = 2|A|$ sommets r_1, \dots, r_p ; $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, R comporte l'arête h_i d'extrémités r_i et r_{i+1} (r_1 si $i = p$) qui sera identifiée à la i ème arête de M rencontrée dans le parcours P ; $\forall a \in A$, si a apparaît dans le parcours P aux rangs j et k ($1 \leq j < k \leq p$), R comporte une arête, notée v_a , d'extrémités r_j et r_k .

R est donc un graphe cubique (sans boucles). $H = \{h_i / i = 1, \dots, p\}$ est un cycle hamiltonien de R et $V = \{v_a, a \in A\}$ est l'ensemble des 'cordes' de H . Soit $G = (V, E)$ le graphe de cordes associé à R comme dans la première partie. En conservant les notations précédentes, il est facile de vérifier qu'il existe une application $\varepsilon: V \rightarrow \text{GF}(2)$ telle que, $\forall a \in A$, les deux paires interdites partitionnant l'ensemble des arêtes de M incidentes à a sont $l_{v_a}^1$ et $l_{v_a}^2$. On en déduit immédiatement que les composantes connexes du graphe D sont les cycles élémentaires C_s ($s \in S$) à l'identification près des arêtes de H et de celles de M .

Le graphe Γ défini dans la première partie est alors clairement isomorphe au graphe γ de départ.

Comme l'espace des cycles de Γ est isomorphe à (V, \mathcal{F}) , l'espace des cycles de γ est alors également isomorphe à (V, \mathcal{F}) , ce qui achève la démonstration.

3. APPLICATIONS

3.1. ESPACES ASSOCIÉS AUX STABLES D'UN GRAPHE DE CORDES

Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes. Soit S un stable de G ; posons $W = V - S$ et supposons $S \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$.

PROPOSITION 1. $(V, \langle w + N_w \cap S, w \in W \rangle)$ est graphique.

EN EFFET: Soit G' le graphe obtenu à partir de G en introduisant, $\forall w \in W$, un nouveau sommet w' adjacent aux mêmes sommets que w (et non adjacent à w). Il est clair que G' est un graphe de cordes. Soit $W' = \{w' / w \in W\}$. G' a pour ensemble de sommets $V' = V \cup W'$. Le système de voisinages de G' est défini par:

$$\forall s \in S, N'_s = \bigcup_{w \in N_s} \{w, w'\}$$

$$\forall w \in W, N'_w = N'_{w'} = N_w + \{v' / v \in N_w \cap W\}.$$

Soit ε l'application de V' dans $\text{GF}(2)$ définie par:

$$\forall s \in S, \varepsilon(s) = 0; \forall w \in W \cup W', \varepsilon(w) = 1.$$

Soit $\mathcal{F}' = \langle \varepsilon(v)v + N'_v, v \in V' \rangle$.

D'après notre théorème, (V', \mathcal{F}') est graphique; il existe donc un graphe Γ' dont nous pouvons identifier l'ensemble des arêtes à V' de sorte que $\mathcal{F}' = \mathcal{C}(\Gamma')$.

Notons que,

$$\forall w \in W: \{w, w'\} = w + N'_w + w' + N'_{w'} = \varepsilon(w)w + N'_w + \varepsilon(w')w' + N'_{w'}$$

et donc

$$\{w, w'\} \in \mathcal{F}' = \mathcal{C}(\Gamma').$$

Soit Γ le graphe obtenu à partir de Γ' en supprimant les arêtes qui appartiennent à W' .

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \{C' \in \mathcal{C}(\Gamma') / C' \subseteq S \cup W\}.$$

Pour tout élément C' de $\mathcal{C}(\Gamma')$, soit $f(C') = C' + \sum_{w \in W} (w' \cdot C')\{w, w'\}$; il est clair que $f(C') \in \mathcal{C}(\Gamma)$; de plus si $C' \in \mathcal{C}(\Gamma)$, $f(C') = C'$; f est donc une application linéaire de $\mathcal{C}(\Gamma')$ sur $\mathcal{C}(\Gamma)$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\Gamma) &= f(\mathcal{C}(\Gamma')) = f(\langle \varepsilon(v)v + N'_v, v \in V' \rangle) \\ &= \langle f(\varepsilon(v)v + N'_v), v \in V' \rangle. \end{aligned}$$

Or: $\forall s \in S, \varepsilon(s)s + N'_s = \bigcup_{w \in N_s} \{w, w'\}$ et donc

$$f(\varepsilon(s)s + N'_s) = \emptyset,$$

$$\forall w \in W, \varepsilon(w)w + N'_w = w + N_w + \{v' / v \in N_w \cap W\}$$

et donc

$$f(\varepsilon(w)w + N'_w) = w + N_w \cap S,$$

$$\forall w \in W, \varepsilon(w')w' + N'_{w'} = w' + N_w + \{v' / v \in N_w \cap W\}$$

et donc

$$f(\varepsilon(w')w' + N'_{w'}) = w + N_w \cap S.$$

On en déduit que $\mathcal{C}(\Gamma) = \langle w + N_w \cap S, w \in W \rangle$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES. S ne contient aucun élément non vide de $\mathcal{C}(\Gamma)$, et est maximal par inclusion pour cette propriété; S est donc une forêt maximale de Γ . Les $N_w \cap S (w \in W)$ sont des chaînes élémentaires de cette forêt; autrement dit, l'hypergraphe $(S, (N_w \cap S, w \in W))$ est un hypergraphe de chaînes d'un arbre (voir [2] pour une définition).

La proposition 1 se démontre simplement comme l'a fait remarquer l'un des rapporteurs de cet article, en utilisant une construction de H. de Fraysseix [3]. Cette construction fait apparaître géométriquement un graphe Γ (connexe) dont S est un arbre; W est le coarbre associé, et les $w + N_w \cap S (w \in W)$ sont les cycles fondamentaux des arêtes de W .

3.2. GRAPHS DE CORDES BIPARTIS ET ESPACES PLANAIRES

Soit (X, \mathcal{F}) une espace. Soit B une base du matroïde associé $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ (rappelons que B est une partie de X ne contenant aucun élément de $\mathcal{F} - \{\emptyset\}$, et maximale par inclusion pour cette propriété). $\forall x \in X - B$, $B \cup \{x\}$ contient un unique élément de $\mathcal{F} - \{\emptyset\}$ que nous noterons f_x . Soit G le graphe simple (biparti) ayant pour ensemble de sommets X qui comporte pour tout x dans $X - B$ et pour tout y dans f_x une arête d'extrémités x et y . H. de Fraysseix a démontré de manière constructive le résultat suivant [3]:

PROPOSITION 2. *G est un graphe de cordes si et seulement si (X, \mathcal{F}) est planaire.*

On peut remarquer qu'une partie de ce résultat découle directement de la Proposition 1. Supposons en effet que G est un graphe de cordes. Il vient:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \langle f_x, x \in X - B \rangle \\ &= \langle x + N_x, x \in X - B \rangle \\ &= \langle x + N_x \cap B, x \in X - B \rangle \end{aligned}$$

et donc (X, \mathcal{F}) est graphique d'après la Proposition 1.

Par ailleurs: $\forall x \in X - B, \forall y \in B$:

$$(x + N_x) \cdot (y + N_y) = x \cdot y + N_x \cdot y + x \cdot N_y + N_x \cdot N_y = N_x \cdot y + x \cdot N_y = 0.$$

Donc

$$\langle y + N_y, y \in B \rangle \subseteq \mathcal{F}^\perp.$$

De plus

$$\dim \langle y + N_y, y \in B \rangle = |B| = |X| - \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}^\perp.$$

Donc

$$\langle y + N_y, y \in B \rangle = \mathcal{F}^\perp.$$

Toujours d'après la Proposition 1, (X, \mathcal{F}^\perp) est graphique. On en déduit que (X, \mathcal{F}) est planaire.

3.3. ESPACE DES BICYCLES D'UN GRAPHE PLANAIRE

Soit $H = (S, A)$ un graphe. Soit $\mathcal{B}(H) = \mathcal{C}(H) \cap \mathcal{K}(H)$; l'espace $(A, \mathcal{B}(H))$ est l'espace des bicycles de H .

Le résultat suivant se déduit aisément de la théorie des diagonales (ou ‘chemins gauche-droite’) des graphes planaires élaborée par P. Rosenstiehl et H. Shank ([7], [10]):

PROPOSITION 3. *L’espace des bicycles de tout graphe planaire est cographique.*

Retrouvons ce résultat à partir de notre théorème.

Soit donc H un graphe planaire ayant pour ensemble d’arêtes X . Soit F une forêt maximale de H (base de $\mathcal{M}(\mathcal{C}(H))$).

Soit G le graphe biparti associé comme au paragraphe précédent à $\mathcal{C}(H)$ et F . G est un graphe de cordes d’après la Proposition 2. Il vient:

$$\mathcal{C}(H) = \langle x + N_x, x \in X - F \rangle,$$

$$\mathcal{K}(H) = \langle y + N_y, y \in F \rangle$$

et donc

$$\mathcal{C}(H) + \mathcal{K}(H) = \langle v + N_v, v \in X \rangle.$$

Or $[\mathcal{C}(H) + \mathcal{K}(H)]^\perp = \mathcal{C}(H)^\perp \cap \mathcal{K}(H)^\perp = \mathcal{K}(H) \cap \mathcal{C}(H)$ et donc $\mathcal{C}(H) + \mathcal{K}(H) = \mathcal{B}(H)^\perp$.

D’après notre théorème, $(X, \mathcal{B}(H)^\perp)$ est graphique et donc $(X, \mathcal{B}(H))$ est cographique.

3.4. GRAPHE D’ENTRELAQUEMENT D’UN ESPACE SANS BICYCLES

Soit (X, \mathcal{F}) un espace. Nous supposons qu’il est *sans bicycles*, c’est à dire que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}^\perp = \{\emptyset\}$. On sait que dans ce cas $\mathcal{P}(X)$ est somme directe de \mathcal{F} et \mathcal{F}^\perp : toute partie Y de X s’écrit d’une manière unique comme somme d’un élément de \mathcal{F} (noté $f(Y)$) et d’un élément de \mathcal{F}^\perp (noté $g(Y)$). En particulier $\forall x \in X: x = f(x) + g(x)$ et deux cas mutuellement exclusifs peuvent se présenter:

(a) $x \in f(x)$

(b) $x \in g(x)$.

On note P l’ensemble des éléments $x \in X$ vérifiant (a) et $Q = X - P$. Deux éléments distincts x et x' de X sont *entrelacés* si et seulement si $x \in f(x')$ (dans ce cas $x' \in f(x)$). Soit G le graphe simple ayant pour ensemble de sommets X et dont la relation d’adjacence est la relation d’entrelacement.

Le résultat suivant est démontré dans [8] et retrouvé par H. de Fraysseix à partir de la Proposition 2 dans [3].

PROPOSITION 4. *G est un graphe de cordes si et seulement si (X, \mathcal{F}) est planaire.*

Nous pouvons retrouver simplement une partie de ce résultat à partir du Théorème. En effet, supposons que G soit un graphe de cordes. Soit ε_P l’application de X dans $\text{GF}(2)$ valant 1 sur P et 0 sur Q ; ε_Q est définie de manière analogue en échangeant P et Q . Alors, $\forall x \in X$:

$$\varepsilon_P(x)x + N_x = f(x)$$

$$\varepsilon_Q(x)x + N_x = g(x).$$

Or $\mathcal{F} = \langle f(x), x \in X \rangle$ et $\mathcal{F}^\perp = \langle g(x), x \in X \rangle$.

Le théorème permet d’affirmer que (X, \mathcal{F}) et (X, \mathcal{F}^\perp) sont graphiques, et donc que (X, \mathcal{F}) est planaire.

On démontrerait de manière analogue le résultat suivant:

PROPOSITION 5. $\forall Y \subseteq X$, l’espace (X, \mathcal{F}_Y) , où: $\mathcal{F}_Y = f(\mathcal{P}(Y)) + g(\mathcal{P}(X - Y))$, est graphique.

3.5. ESPACE DES PARTIES BICYCLIQUES D'UN GRAPHE DE CORDES

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *partie bicyclique* de G est une partie S de V telle que $\omega_G(S) \in \mathcal{B}(G)$, ou, de manière équivalente, $\partial_G \omega_G(S) = \emptyset$. Il est clair que l'ensemble des parties bicycliques de G est un sous-espace de $\mathcal{P}(V)$ que nous noterons $\mathcal{A}(G)$. $(V, \mathcal{A}(G))$ est l'espace des parties bicycliques de G .

PROPOSITION 6. *L'espace des parties bicycliques de tout graphe de cordes est cographique.*

EN EFFET. Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes et soit $S \subseteq V$.

$$S \in \mathcal{A}(G) \Leftrightarrow \partial_G \omega_G(S) = \emptyset \Leftrightarrow \sum_{v \in S} \partial_G \omega_G(v) = \emptyset.$$

Or, G étant un graphe simple, $\partial_G \omega_G(v) = N_v + \partial_G(E) \cap \{v\}$. Posons $\forall v \in V: \varepsilon(v) = \partial_G(E) \cdot v$. Il vient:

$$\begin{aligned} S \in \mathcal{A}(G) &\Leftrightarrow \sum_{v \in S} \varepsilon(v)v + N_v = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall w \in V, \left(\sum_{v \in S} \varepsilon(v)v + N_v \right) \cdot w = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left(\sum_{v \in S} \varepsilon(v)v + N_v \right) \cdot w &= \sum_{v \in S} \varepsilon(v)(v \cdot w) + N_v \cdot w \\ &= \varepsilon(w)(w \cdot S) + \sum_{v \in S} N_w \cdot v \\ &= (\varepsilon(w)w + N_w) \cdot S. \end{aligned}$$

Donc

$$S \in \mathcal{A}(G) \Leftrightarrow S \in \langle \varepsilon(w)w + N_w, w \in V \rangle^\perp.$$

La Proposition 6 découle alors immédiatement du Théorème.

3.6. UNE PROPRIÉTÉ DE COLORATION DES GRAPHS DE CORDES

Le 'Théorème du 8-flot', démontré dans [4] et amélioré depuis par P. Seymour ([9]), peut se formuler comme suit: Soit (X, \mathcal{F}) un espace graphique tel que $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Il existe $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^3 F_i$.

Cette propriété, combinée à notre théorème, conduit en particulier au résultat suivant:

PROPOSITION 7. *Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes sans sommets isolés. Il existe $S_1, S_2, S_3 \subseteq V$ tels que: $\forall v \in V, \exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que v est adjacent à un nombre impair de sommets de S_i .*

EN EFFET. Pour $X = V$ et $\mathcal{F} = \langle N_v, v \in V \rangle$ nous sommes dans les conditions du Théorème du 8-flot. Il existe donc $S_1, S_2, S_3 \subseteq V$ tels que: $\bigcup_{i=1}^3 (\sum_{v \in S_i} N_v) = V$, ce qui est équivalent au résultat à démontrer.

REMARQUES. Il serait très intéressant d'obtenir une démonstration directe de la Proposition 7.

On peut dans le même ordre d'idées reformuler sur les graphes de cordes tout problème relatif aux espaces graphiques, tels ceux étudiés dans [5].

4. CONCLUSION

Notre théorème permet d'unifier divers résultats connus de caractère algébrique sur les graphes de cordes et apporte un éclairage nouveau sur la classe des espaces graphiques. Malheureusement, il ne permet pas de caractériser les graphes de cordes: la roue à cinq sommets extérieurs n'est pas un graphe de cordes alors que tous ses espaces de voisinages sont graphiques (si (X, \mathcal{F}) est non graphique, $|X| \geq 7$).

Je remercie les rapporteurs de cet article pour leurs remarques pertinentes.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1974.
2. J. C. Fournier, Graphes de cordes, hypergraphes de chaînes d'un arbre et matroïdes graphiques, *Actes du Colloque 'Algèbre appliquée et Combinatoire'*, Grenoble, Juin 1978 (C. Benzaken, ed.), pp. 164–171.
3. H. de Fraysseix, Local complementation and interlacement graphs, *Discrete Math.* **33** (1981), 29–35.
4. F. Jaeger, Flows and generalized coloring theorems in graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **26** (1979), 205–216.
5. F. Jaeger, On graphic-minimal spaces, *Colloque Franco-Canadien de Combinatoire, Annals of Discrete Mathematics* **8** (1980), 123–126.
6. A. Kotzig, Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations, in 'Theory of Graphs' (Erdős et Katona éditeurs), Tihany, Hongrie, 1968, pp. 219–230.
7. P. Rosenstiehl, Bicycles et diagonales des graphes planaires, *Cahiers du C.E.R.O.* **17** (2–3–4) (1975), 365–383.
8. P. Rosenstiehl, Mot et vecteur d'un graphe mêlé, *Journées de Combinatoire et Informatique* (Bermond et Cori éditeurs), Juin 1975, pp. 317–328.
9. P. Seymour, Nowhere-zero 6-flows, *J. Combin. Theory Ser. B.* **30** (1981), 130–135.
10. H. Shank, The theory of left-right paths, in *Proceedings of the Third Australian Conference on Combinatorial Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, pp. 42–54.
11. D. J. A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.

Received 5 May 1981 and in revised form 14 January 1983

F. JAEGER

I.M.A.G. BP68, 38402 St Martin d'Hères Cédex, France